MO 27 – Kombinatorika

**n-faktoriál:** je súčin všetkých prirodzených čísel od 1 po n. n!= 1.2.3...n, n∈N, 0!=1

**Pravidlo súčtu:** ak nejaký *objekt A* môžeme vybrať *m* rôznymi spôsobmi a *iný objekt B* môžeme vybrať *n rôznymi spôsobmi* , tak počet všetkých výberov, ktoré môžeme urobiť je **m+n**.

**Pravidlo súčinu:** ak nejaký objekt A môžeme vybrať m rôznymi spôsobmi a potom môžeme objekt B vybrať n rôznymi spôsobmi, tak počet spôsobov na postupné vykonanie týchto výberov je **m.n**.

*Andrea si môže obliecť jednu zo siedmych blúzok a jednu z piatich sukní. Koľko možných kombinácií blúzka – sukňa si môže obliecť?*

**Kombinačné číslo: (binomický koeficient)** $\left(\begin{array}{c}n\\k\end{array}\right)=\frac{n!}{k!\left(n -k\right)!}$**, k,n∈N, 0≤k≤n**

**Binomická veta:** vďaka nej môžeme n-tú mocninu dvoch sčítancov rozložiť na výraz súčtov n+1 sčítancov, a,b∈R, n∈N



**Usporiadaná k-tica:** je usporiadaný zoznam k prvkov. Závisí na poradí prvkov a prvky sa môžu nachádzať viackrát. $\left[1,3,5\right] $≠$  \left[3,1,5\right]$

**Neusporiadaná k-tica:** pozostáva z k rôznych prvkov. Nezáleží na poradí. $\left\{1,3,5\right\}$=$\left\{3,1,5\right\}$

**Kombinácie**

**Bez opakovania:-**koľkými spôsobmi možno spomedzi *n* objektov vybrať *k* objektov, ak nezáleží na poradí -koľko k-prvkových množín má n-prvková množina **C(k,n)=**$\frac{n!}{k!\left(n-k\right)!}$

**S opakovaním:-**koľkými spôsobmi možno daných *n* objektov vybrať *k* objektov, ak nezáleží na poradí vyberania a objekty môžu byť vybrané viackkrát **C´(k,n)=(**$\begin{matrix}n+k-1\\k\end{matrix})$

**Variácie**

**Bez opakovania: -**koľkými spôsobmi možno z daných *n* objektov vybrať *k* objektov, ak záleží na poradí vyberania *-koľko usporiadaných k-tic možno vytvoriť z n prvkov*-V(k,n)=$\frac{n!}{\left(n-k\right)!}$

**S opakovaním:** koľkými spôsobmi možno z daných *n* objektov vybrať *k* objektov, ak záleží na poradí vyberania a objekty môžu byť vybrané viackrát **V´(k,n)=**$n^{k}$

**Permutácie**

**Bez opakovania:** koľkými spôsobmi možno zoradiť do radu prvky nepráznej konečnej n-prvkovej množiny **P(n)=n!**

**S opakovaním:** vyskytujú sa vtedy, ak v základnej množine sa niektoré prvky vyskytujú niekoľkokrát **P´(n,**$n\_{2},….n\_{k})=\frac{(n\_{1},+ n\_{2}+…n\_{k})}{ n\_{1}! n\_{2}!  …n\_{k}!}$

MO 28 – Štatistika

**Štatistická jednotka** - je základný prvok štatistického súboru

**Štatistický súbor** - skupina prvkov, ktoré sú predmetom štatistického skúmania a ktoré majú spoločnú vlastnosť ,neprázdna konečná množina M ,*napr. žiaci triedy 1.A*

**Rozsah štatistického súboru** - počet prvkov množiny M označujeme |M| = n, *napr. 20 žiakov*

**Štatistický znak** - funkcia, ktorá každému prvku množiny M pridelí práve 1 reálne číslo = kvantitatívny znak alebo kvalitatívny znak

* kvantitatívny znak: vek, výška, váha
* kvalitatívny znak: farba očí, pohlavie, národnosť
* hodnoty znaku označujeme: $x\_{1, }x\_{2},  ….x\_{n}$

**Absolútna početnosť číslo**, ktoré udáva, koľkokrát sa v súbore M vyskytuje hodnota znaku $x\_{i}$ označujeme $n\_{i}$

**Relatívna početnosť** $\frac{n}{n\_{i}}$ kde $n\_{i}$ je absolútna početnosť hodnoty znaku $x\_{i}$ , n je rozsah súboru M

**Aritmetický priemer** - označujeme $\overbar{x}$ aritmetický priemer hodnôt $x\_{1},  x\_{2}, …x\_{n}$

 je to súčet všetkých znakov vydelený počtom znakov n

 

**Medián** - označujeme med(x) ak je rozsah súboru nepárne číslo n, tak je to prostredný člen spomedzi hodnôt $x\_{i}$, ak sú **usporiadané podľa veľkosti** ak je rozsahom súboru párne číslo n, med(x) určíme : aritmetický priemer „prostredných“ dvoch členov

**Modus** - *mod(x)* je to najčastejšie vyskytujúca sa hodnota v súbore M

**Smerodajná odchýlka** – označujeme s 

**Rozptyl** - označujeme $s^{2}$ 

smerodajná odchýlka a rozptyl citlivejšie charakterizujú variabilitu hodnôt súboru, zvýrazňujú váhu odchýlok hodnôt od x , dávajú informáciu o rozptýlení hodnôt okolo x

MO 29 – Pravdepodobnosť

Zaoberá sa matematickými zákonitosťami, ktoré sa prejavujú v náhodných pokusoch

Zákonitosti majú opodstatnenosť len pri dostatočne veľkom počte pokusov,je číslo, ktoré patrí $\left⟨0,1\right⟩$

Väčšinou sa pravdepodobnosť vyjadruje percentuálne tzv. 0% - 100% (v praktickom využití)

**Náhodné pokusy**

* Pokusy, ktoré pri dodržaní predpísaných podmienok vedú k rôznym výsledkom
* Výsledky závisia od predpísaných podmienok a náhody

**Množina možných výsledkov pokusu**

* Pri každom náhodnom pokuse vieme vymenovať všetky možné výsledky. Tieto sa navzájom vylučujú a jeden z nich nastane vždy - označujeme: **Ω**

**Javy**

* Podmnožiny množiny možných výsledkov
* Javy označujeme A, B, C ...

**Nemožný jav** – pri daných podmienkach nikdy nenastane $P\left(∅\right)=0$

**Istý jav** – pri daných podmienkach nastane vždy $P\left(Ω\right)=1$

**Pravdepodobnosť javu A**

* Súčet pravdepodobností výsledkov priaznivých javu $A$
* Ak má pokus $m $ rovnako pravdepodobných výsledkov, tak $P\left(A\right)=\frac{m\left(A\right)}{m}$**,** pričom $m\left(A\right)$ je počet výsledkov priaznivých javu $A$

 Z toho vyplýva že:

1. *Pravdepodobnosť nemožného javu sa rovná 0,* $P\left(∅\right)=0$
2. *Pravdepodobnosť istého javu sa rovná 1,* $P\left(Ω\right)=1$
3. *O pravdepodobnostiach ľub. javu* $A $*platí:*$0\leq P\left(A\right)\leq 1$

**Pravdepodobnosť javov**

* Ak ω $\in A, $hovoríme, že výsledok $ω$ je **PRIAZNIVÝ JAVU** $A$
* Ak je $A$ ⊂ $B,$ hovoríme, že jav $A$ je **PODJAVOM JAVU** $B$
* **ZJEDNOTENIE JAVOV** $A$ a $B$ nastáva práve vtedy, keď nastane aspoň jeden z javov $A$ alebo $B$ $P\left(A∪B\right)=P\left(A\right)+P(B)$
* Ak $A∩B=∅$ hovoríme: JAVY $A$ a $B$ sa navzájom **VYLUČUJÚ (**sú navzájom nezlúčitelné, disjunktné)$)$
* **Opačné javy (udalosti)** – doplnkové udalosti, pretože udalosť $A´$ k udalosti $A$ je doplnok množiny $A$ v základnej množine Ω platí: $A ∪A´ = Ω$

Ak má udalosť $A$ práve $m$ priaznivých výsledkov a ak všetkých možných výsledkov je $n$, tak doplnková udalosť $A´$ má práve $n-m$ priaznivých výsledkov

platí: $P\left(A´\right)=\frac{n-m}{n}=\frac{n}{n} -\frac{m}{n}=1-P\left(A\right)$ $P\left(A\right)+P\left(A´\right)=1$

* **PRIENIK JAVOV** $A$ a $B$ nastáva práve vtedy, ak nastanú oba $A$ a $B$

MO 30 - Postupnosti

**-** je funkcia definovaná v množine prirodzených čísel N. Jej definičným oborom je podmnožina prirodzených čísel.

* Funkčné hodnoty **f(n) = an** postupnosti priradené prirodzenému číslu n-  **členy postupnosti** a označujeme ich an, bn.....an – je n – tý člen postupnosti ,*n udáva poradie člena an v postupnosti*

**{an}kn=1 alebo (an)∞n=1**

Rozlišujeme konečnú a nekonečnú postupnosti.

1. **Konečná postupnosť** sa zapisuje a1, a2, a3, ...... ak =**{an}kn=1**

Definičným oborom je množina prvých **k** prirodzených čísel.

1. **Nekonečná postupnosť** sa zapisuje a1, a2, a3, ...... an =**{an}∞n=1**, resp. **(an)∞n=1**

Definičným oborom je celá množina prirodzených čísel.

Podľa charakteru členov postupnosti

1. **číselná postupnosť** – jej členmi sú čísla.
2. **funkcionálna postupnosť** – jej členmi sú funkcie

**Grafom postupnosti** je rad izolovaných bodov so súradnicami [n; an], kde n є N.

**Vlastnosti postupnosti:**

1. **rastúca postupnosť** <=> pre všetky n є N platí an+1 > an
2. **klesajúca postupnosť** <=> pre všetky n є N platí an+1 < an
3. **nerastúca postupnosť** <=> pre všetky n є N platí an+1 ≤ an
4. **neklesajúca postupnosť** <=> pre všetky n є N platí an+1 ≥ an
* v prípade 1. a 2 je postupnosť **rýdzo monotónna**, v prípadoch 3 a 4 hovoríme o **monotónnej**postupností.
1. **ohraničená zhora** <=> existuje také h є R, že pre každé n є N je an ≤ h
2. **ohraničená zdola** <=> existuje také d є R, že pre každé n є N je an ≥ d
* ak je postupnosť ohraničená zhora a zároveň zdola, potom hovoríme o ohraničenej postupnosti.

**Artitmetická postupnosť :**

Stály rozdiel (diferencia) medzi susednými členmi

Každý člen(okrem prvého) je aritmetickým priemerom susedných dvoch

* **an = (an-1 + an+1) / 2**
* **an = a1 + (n – 1) . d**
* **ar = as + (r - s) . d**
* **sn = n/2 . (a1 + an)**

**Geometrická postupnosť**

 a/ n-tý člen vyjadríme: **an= a1. qn-1**

b/ pre ľubovolné dva členy postupnosti **as= ar. qs-r**

c/ pre súčet n-členov **sn= a1** . ****